Ejercicios para Control 1

1. Sea el Universo los enteros de 1 al 10 y los conjuntos siguientes: A = {1,2,3,4,5}, B = {1,2,4,8}, C = {1,2,3,5,7} y D = {2,4,6,8}. Determinar:

a) El conjunto (A∩B)∪C y su cardinalidad

b) El conjunto (B △ C) – D y su cardinalidad

c) El conjunto (A∩B) – (C∪D) y su cardinalidad

**Solución**:

a) (A∩B)∪C = {1,2,3,4,5,7} 🡺 #(A∩B)∪C = 6

b) (B△C) – D = {3, 5, 7} 🡺 # ((B△C) – D) = 3

c) (A∩B) – (C∪D) = ∅ 🡺 #((A∩B) – (C∪D)) = 0

1. Probar usando demostración directa que si A, B, C y D son subconjuntos de un universo U entonces:

(A ⊆ C) y (B ⊆ D) ⇒ (A ∪ B) ⊆ (C ∪ D)

**Solución**:

Si A ⊆ C entonces x∈A ⇒ x∈C

Si B ⊆ D entonces x∈B ⇒ x∈D

Entonces:

x ∈ (A ∪ B) ⇒ x∈A o x∈B ⇒ x∈C o x∈D ⇒ x ∈ (C ∪ D)

Luego se cumple la propiedad.

1. Probar usando reducción al absurdo que si A y B son conjuntos de un universo U entonces: A ∪ B ⊆ B ⇒ A – B = Ø.

**Solución**: supongamos que A – B ≠ Ø, entonces sea x ε A – B, luego x ε A y x ∉ B. Pero si x ε A entonces x ε A ∪ B y como se tiene que A ∪ B ⊆ B entonces x ε B lo que es una contradicción. Luego se verifica que: A ∪ B ⊆ B ⇒ A – B = Ø.

1. Probar usando inducción que para n ≥ 1:

**Solución**:

Base: para n = 1: 1/1\*3 = 1/3 y 1/(2 + 1) = 1/3.

Hipótesis de inducción: para n ≥ 1

Tesis: para n ≥ 1:

Demostración:

Luego se verifica la propiedad.

1. Sea U = {1, 2, 3, 4, 5}. Se pide determinar si las siguientes son relaciones de equivalencia. Si lo son determinar las clases de equivalencia de los elementos de U y si no lo son explicar porqué.
2. R1 = {(x, y) / 3 divide a x – y}
3. R2 = {(x, y) / 3 divide a x + y}

**Solución**: para a) R1 = {(x, y) / 3 divide a x – y}

1. Es refleja: (x, x) ∈ R pues 3 divide al cero.
2. Es simétrica: si (x, y) ∈ R entonces 3 divide a x – y, luego el 3 divide a y – x = – (x – y), luego (y, x) ∈ R.
3. Es transitiva: si (x, y) ∈ R e (y, z) ∈ R, entonces 3 divide a x – y, y el 3 divide a y – z, luego x – y = 3k, y – z = 3j, sumando: x – z = 3(k + j), luego el 3 divide a x – z, luego (x, z) ∈ R1.

Por i), ii) y iii) R es relación de equivalencia. Las clases de equivalencia son: [1] = {1, 4}, [2] = {2, 5}, [3] = {3}.

Para parte b) R2 = {(x, y) / 3 divide a x + y}:

No es reflexiva ya que x R2 x significa que 3 divide a 2x, lo cual no es cierto para todo x ∈ U. Luego R2 no es relación de equivalencia.

1. Probar que la siguiente es una relación de orden sobre ℤ+:

a R b ⇔ a = bk para algún k ∈ ℤ+

**Solución**:

1. Reflexiva: a R a ⇔ a = a1, con k = 1, R es reflexiva.
2. Antisimétrica: para k y p en ℤ+:

a R b ⇒ a = bk

b R a ⇒ b = ap

Luego: a = (ap)k = apk, luego: pk = 1, y como p y k son enteros positivos entonces p = k = 1 es la única solución, luego se tiene a = b.

1. Transitiva: para k y p en ℤ+:

a R b ⇒ a = bk

b R c ⇒ b = cp

Luego: a = (cp)k = cpk, luego se tiene que a R c se verifica.

Por i), ii) y iii) R es relación de orden sobre ℤ+.

1. Sean los conjuntos A = {1, 5, 7} y B = {a, b, c, d}. Determinar:

¿Cuántas funciones inyectivas se pueden definir entre A y B?

¿Cuántas funciones biyectivas se pueden definir entre A y B?

**Solución**:

Son 4! = 24 funciones inyectivas. Ninguna biyectiva porque se tiene #A < #B.

1. Verificar que la función definida entre A = {x/x ∈ ℝ, x ≥ 0} y B = {x/x ∈ ℝ, x ≥ 1}: f(x) = + 1 es biyectiva y determinar su inversa.

**Solución**:

Inyectiva: sea f(x) = f(y) ⇒ = ⇒ x = y, luego f es inyectiva.

Sobreyectiva: como f(x) = + 1 ≥ 1 para todo x ∈ ℝ, entonces:

Im(f) = B = {x/x ∈ ℝ, x ≥ 1}, luego f es sobreyectiva.

Inversa: y = ⇒ x = (y – 1)2, luego f-1(y) = (y – 1)2.

1. Determinar Im(f) para que la función sea sobreyectiva (suponga que está definida sobre los reales). ¿Condición para ser inyectiva? ¿Cuál sería su inversa si es biyectiva?

**Solución**:

Sea y = entonces se despeja x = . Luego Im(f) = ℝ–{1}.

Para x distinto de –2 se igualan: y se obtiene x = y. Luego f es inyectiva si Dom(f) = ℝ–{–2}.

La inversa de f: ℝ–{–2} 🡪 ℝ–{1} es f-1(y) = .

1. Sea A = {1, 2, 3} un alfabeto. Describir los elementos de los siguientes lenguajes sobre A y decir si son finitos o infinitos:
2. L1 = ({1}∪{2, 3})+
3. L2 = (∅\*∪{2, 3}){1, 2}
4. L3 = ({1, 3}{2}){2}\*

**Solución**:

1. L1 = ({1}∪{2, 3})+ = {1, 2, 3}+ = {1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113,…}

L1 es infinito.

1. ∅\* = {ε} luego: L2 = (∅\*∪{2, 3}){1, 2} = {ε, 2, 3}{1, 2} = {1, 2, 21, 22, 31, 32}

L2 es finito.

1. L3 = ({1, 3}{2}){2}\* = {12, 32} {ε, 2, 22, 222,…}

L3 = {12, 32, 122, 322, 1222, 3222,…}

L3 es infinito

1. Para la siguiente gramática definida sobre el alfabeto {0, 1}:

A 🡪 0C | ε

C 🡪 0C | 1C | 0 | 1

1. Describir como derivar el string 001010
2. Determinar el lenguaje generado explicando cuál es el lenguaje o expresando strings hasta largo 4 por lo menos

**Solución**:

A 🡪 0C | ε

C 🡪 0C | 1C | 0 | 1

A 🡪 0C 🡪 00C 🡪 001C 🡪 0010C 🡪 00101C 🡪 001010

El árbol de derivación es el siguiente:

A

/ \

0 C

/ \

0 C

/ \

1 C

/ \

0 C

/ \

1. C

|

0

1. L = {ε, 00, 01, 000, 001, 010, 011, 0000, 0001,…}

L = {ε}∪{0}{0, 1}+

1. Usando tabla de verdad verifique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
2. ¬ (P ⇒ Q) ⇒ P
3. ¬ P ⇒ (P ⇒ Q)

**Solución**:

1. ¬(P ⇒ Q) ⇒ P

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P ⇒ Q | ¬ (P ⇒ Q) | ¬ (P ⇒ Q) ⇒ P |
| V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | F | V |

Luego se verifica que ¬(P ⇒ Q) ⇒ P es Verdadero.

1. ¬P ⇒ (P ⇒ Q)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | ¬P | P ⇒ Q | ¬P ⇒ (P ⇒ Q) |
| V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |

Luego se verifica que ¬P ⇒ (P ⇒ Q) es Verdadero.

1. Usando el principio de inclusión–exclusión determinar cuántos números hay entre 1 y 100 (ambos incluidos) que **no sean** múltiplos ni de 3, ni de 5, ni de 7.

**Solución**: sean A = {x/ x es múltiplo de 3}, B = {x / x es múltiplo de 5} y C = {x/ x es múltiplo de 7}.

Sus cardinalidades son:

|A| = 33, pues 3\*33 = 99 y 3\*34 = 102

|B| = 20, pues 5\*20 = 100 y 5\*21 = 105

|C| = 14, pues 7\*14 = 98 y 7\*15 = 105

A∩B = {x / x es múltiplo de 3 y de 5, o sea múltiplo de 15}

|A∩B| = 6, pues 15\*6 = 90 y 15\*7 = 105

A∩C = {x / x es múltiplo de 3 y de 7, o sea múltiplo de 21}

|A∩C| = 4, pues 21\*4 = 84 y 21\*5 = 105

B∩C = {x / x es múltiplo de 5 y de 7, o sea múltiplo de 35}

|B∩C| = 2, pues 35\*2 = 70 y 35\*3 = 105

A∩B∩C = {x / x es múltiplo de 3, 5, 7, o sea múltiplo de 105}

⇒| A∩B∩C| = 0.

Por el principio de inclusión – exclusión se tiene:

|A∪B∪C| = |A| + |B| + |C| – |A∩B| – |A∩C| – |B∩C| + |A∩B∩C|

Entonces: |A∪B∪C| = 33 + 20 + 14 – 6 – 4 – 2 = 55

Entonces los números que no son múltiplos de 3, 5 y 7 entre 1 y 100 son 100 – 55 = 45 números.

1. a) Seis personas entran a una sala. Si hay 10 sillas ¿de cuántas maneras distintas las pueden usar?

b) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra Matemáticas?

Explique sus respuestas y entregue el resultado numérico.

**Solución**:

1. Son permutaciones de 10 elementos tomados en grupos de 6 elementos, o sea: 10P6 = 10!/4! = 151.200 maneras.
2. Son permutaciones de 11 elementos en que hay elementos repetidos (hay tres a’s, dos t’s y dos m’s): 11P3,2,2 = 11!/(3!\*2!\*2!) = 1.663.200 palabras diferentes.
3. Usando el Teorema del Binomio determinar el término de x3 en el desarrollo de:

**Solución**:

El coeficiente de x3 sale de k + j = 3, con j ≤ k, o sea: j = 0 con k = 3 y j = 1 con k = 2. Luego:

1. Usar Z13 para:
2. Resolver: 185x + 196 = 32
3. Resolver el sistema de ecuaciones:

251p + 163q = 26

126q – 145p = 66

**Solución**: usando aritmética módulo 13:

1. 3x + 1 = 6 ⇒ 3x = 5 ⇒ x = 5\*(3)-1 = 5\*9 = 6 (mod 13).
2. El sistema con módulo 13 queda:

4p + 7q = 0 (1)

9q – 2p = 1 (2)

Multiplicando por 2 la segunda ecuación:

18q – 4p = 2

Sumando ambas ecuaciones:

25q = 2 ⇒ 12q = 2 ⇒ q = 2\*(12)-1

⇒ q = 2\*12 = 11 (mod 13)

En la ecuación (1):

4p + 7\*11 = 0 ⇒ 4p + 12 = 0 ⇒ 4p = 1

⇒ p = 1\*(4)-1 = 10 (mod 13)